

CUARTA ÉPOCA

## GEOGRAPHICALIA

1977 - 1988 - 2000 - 2023

**EDITORIAL:**

De los problemas  
territoriales a la gestión  
sostenible

**ARTÍCULOS:**

Crisis de la vivienda en España |  
Datos geoespaciales en Ecuador  
| Análisis de la valoración  
catastral en Ecuador y España |  
Percepción del alumnado sobre  
riesgos naturales | Simulación  
de la población de Navarra 2050  
| Planificación energética  
territorial

**MAPAS:**

Preservación de rodales  
maduros en la gestión forestal |  
Cartografía climática de  
precipitación media -ANE- |  
Cartografía multivariable de las  
dinámicas turísticas y  
demográficas | Mapa de Paisaje  
como herramienta de gestión  
territorial

**NOTAS DE INVESTIGACION  
Y RESEÑAS:**

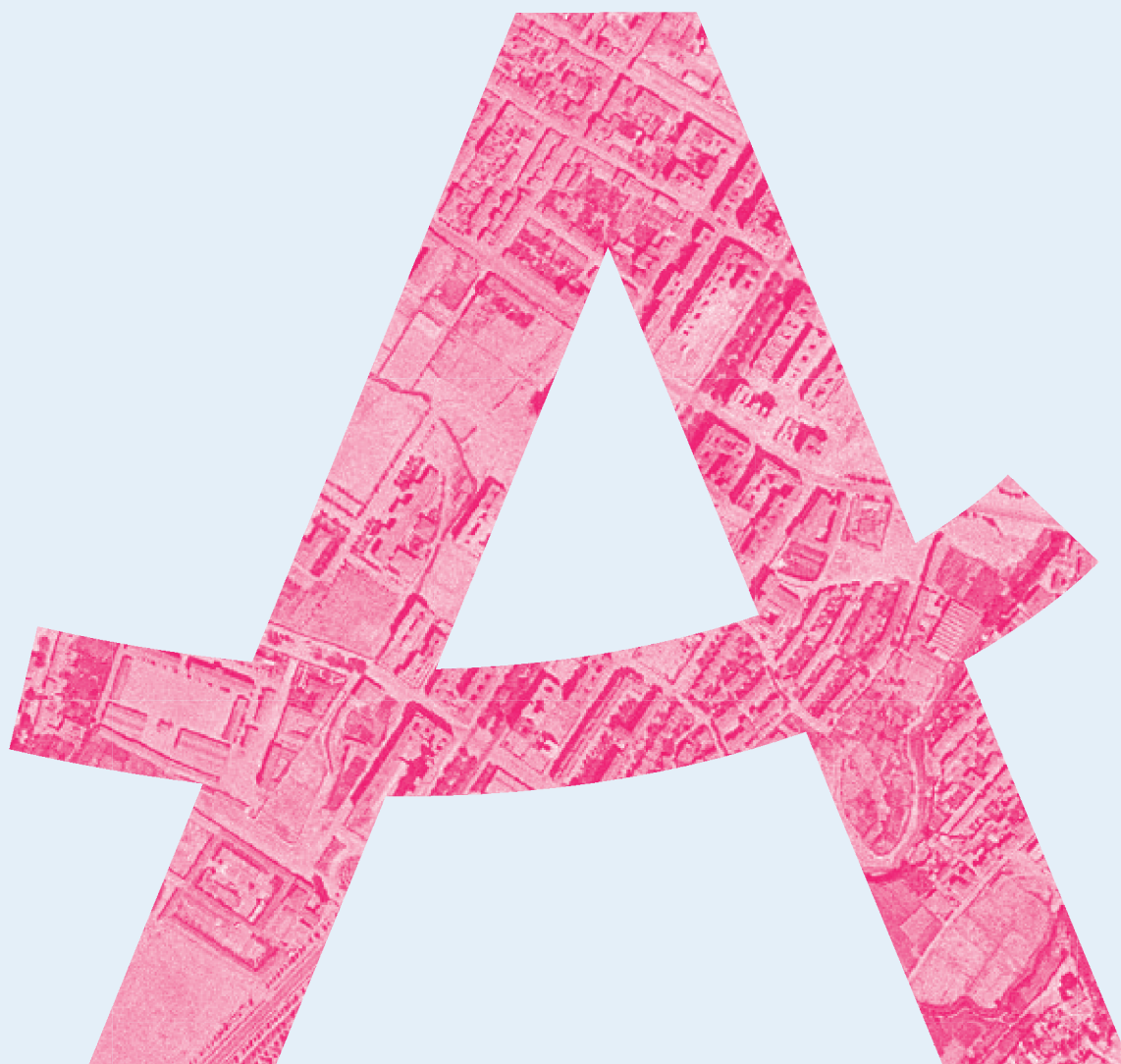
Sensores remotos y de proximi-  
dad para la monitorización del  
suelo en áreas quemadas | Le  
temps des liens | Planificación  
adaptativa y resiliencia ante  
sequías e inundaciones |  
Diálogos entre geografía y  
urbanismo



1542

Departamento de  
Geografía y  
Ordenación del Territorio  
Universidad Zaragoza





**Modelo demográfico estocástico aplicado a la proyección de la población de Navarra entre 2025 y 2050**

Miguel Ángel Miranda González



# Modelo demográfico estocástico aplicado a la proyección de la población de Navarra entre 2025 y 2050

Miguel Ángel Miranda González

Universidad Pública de Navarra (Sección Geografía Humana)

Arrosadia, s/n. 31006 Pamplona

miranda.145674@e.unavarra.es

---

**Resumen:** En este trabajo presentamos la metodología utilizada en un estudio en fase de redacción para proyectar la evolución demográfica entre 2025 y 2050 en Navarra. Los enfoques tradicionales en geografía suelen basarse en tasas de crecimiento fijas o en el análisis de componentes. En contraste, en este estudio mostramos un modelo de simulación de Montecarlo combinado con ecuaciones diferenciales estocásticas (EDE), lo que permite incorporar la *indeterminación* a los sistemas demográficos. El objetivo del método propuesto es estimar la probabilidad de que la población alcance una determinada cantidad, en este caso en la Comunidad Foral de Navarra, en el periodo comprendido entre 2025 y 2050. La elección de un modelo estocástico responde a la necesidad de tratar el tiempo y las variables demográficas como valores discretos, capturando así con mayor precisión la naturaleza dinámica de la población.

**Palabras clave:**

Población de Navarra, Simulación de Montecarlo, ecuación diferencial estocástica, variables discretas.

**Stochastic demographic model applied to the population projection of Navarre between 2025 and 2050**

**Abstract:** In this paper, we present the methodology used in a study currently being drafted to project demographic trends between 2025 and 2050 in Navarre. Traditional approaches in geography are usually based on fixed growth rates or component analysis. In contrast, in this study we present a Monte Carlo simulation model combined with stochastic differential equations (SDE), which allows us to incorporate *uncertainty* into demographic systems. The aim of the proposed method is to estimate the probability that the population will reach a certain size, in this case in the Autonomous Community of Navarre, in the period between 2025 and 2050. The choice of a stochastic model responds to the need to treat time and demographic variables as discrete values, thus capturing the dynamic nature of the population more accurately.

**Keywords:**

Population of Navarre, Monte Carlo Simulation, stochastic differential equation, discrete variables.

Recibido: 10-03-2015. Aceptado: 04-12-2025.

DOI: [https://doi.org/10.26754/ojs\\_geoph/geoph.20257711633](https://doi.org/10.26754/ojs_geoph/geoph.20257711633)

## 1. Introducción

DESDE TIEMPOS ANCESTRALES el ser humano ha sentido una gran fascinación por el futuro y, a su vez, ha buscado estrategias para enfrentarse a la indeterminación del porvenir. Desde hace algunos siglos, las matemáticas y la lógica han sustituido a la divinidad para proyectar las expectativas humanas en el futuro. En este contexto, la indeterminación forma parte de la investigación demográfica cuando se trata de estimar el número de habitantes que puedan existir en tiempos venideros. Ninguna ecuación garantiza que podamos conocer con certeza las poblaciones futuras ni, por tanto, el número de nacidos, defunciones, o migraciones que vayan a existir al cabo de unos años. Se puede intuir que a medida que se incorporan más variables para comprender el comportamiento humano, resulta más difícil especificar la cantidad de población esperada en el futuro. Esta dificultad se incrementa aún más cuando ocurren eventos imprevistos de gran magnitud que afectan directamente a la población, como pandemias, crisis económicas severas y otros acontecimientos sociales o naturales de difícil pronóstico. En el mejor de los casos, es posible establecer condiciones iniciales con datos conocidos para *simular*, mediante operaciones determinísticas o estocásticas, las poblaciones en un futuro determinado.

Las proyecciones demográficas son un tema recurrente en la geografía. Uno de los métodos más sencillos consiste en suponer un crecimiento de población a partir del cálculo de la tasa de crecimiento extrapolando las tasas observadas para proyectar la población futura. En este caso, se asume un crecimiento constante que puede ser lineal, exponencial o logístico. Otro de los procedimientos comúnmente empleados es el *método de componentes*, en el que intervienen una serie de variables demográficas como la natalidad, la mortalidad, la inmigración, la emigración, el sexo o la edad; estas proyecciones se pueden hacer por edades o grupos de edades (Roncero & Rodríguez, 2019). El I.N.E., por ejemplo, emplea este método en el que proyecta la fecundidad mediante una distribución de probabilidad Beta (I.N.E., 2024). En este trabajo se analiza la población en su conjunto, ya que el valor de la población registrada parte de la población del año anterior e incorpora implícitamente el crecimiento vegetativo y el saldo migratorio del período anual precedente ( $P_{n+1} = P_n + Sm_n + Cv_n$ ). No se consideran la edad ni los grupos de edad, pues el objetivo no es estudiar la estructura de la población, sino estimar la probabilidad de que, en un año específico, la población de la Comunidad de Navarra supere un determinado umbral. Por tanto, el presente trabajo no es un estudio demográfico de población, sino la presentación de un modelo de proyección aplicable a las diferentes variables demográficas, como, es este caso, la población.

Existen publicaciones que generan proyecciones de población mediante una metodología que combina el método de componentes-cohorte, basado en cadenas de Markov, con simulaciones

de Montecarlo (Osés-Arranz & Quilis, 2017). Al igual que Osés-Arranz y Quilis abordaremos propuestas matemáticas determinísticas y estocásticas, pero nos centraremos en los modelos que emplean ecuaciones diferenciales estocásticas para hacer las proyecciones de población. El punto de partida es considerar el tiempo (2000, 2001, ..., 2024) como una variable discreta. En consecuencia, las funciones demográficas en las que el tiempo interviene de forma directa o indirecta son *funciones discontinuas* y, dado que cada valor de  $X$  (por ejemplo, el tiempo) le corresponde un único valor de  $Y$  (por ejemplo, la población), dichas funciones también son *sobreyectivas*. Bajo este criterio, se analizan los parámetros poblacionales en el pasado y el futuro. En la fase previa de la simulación utilizaremos los valores de las poblaciones correspondientes a los años comprendidos entre el 2000 y el 2024. A partir de estos datos, se implementará una simulación de Montecarlo aplicada al método Euler-Maruyama (M-E-M).

El objetivo es doble: en primer lugar, validar el modelo mediante un resultado numérico comparable con los datos de población conocidos de 2000 a 2024. En segundo lugar, ampliar la simulación entre el 2025 y el 2050. Los datos obtenidos se compararán con las proyecciones del Instituto de Estadística de Navarra (Nastat) que comienza en 2021 y se extiende hasta el 2035. Durante este intervalo, se evaluará la aproximación de ambas series a los datos reales y las discrepancias entre los datos de las dos proyecciones.

Se ha decidido que la simulación M-E-M genere 10.000 datos anuales, esta cantidad garantiza que los valores medios tengan poca variación en repeticiones sucesivas. De este modo, la simulación iniciada en el 2000 hasta el 2050 generará una matriz de dimensiones [10.000 X 51] con un total 510.000 valores.

Generalmente, las proyecciones de población se presentan en términos absolutos. Sin embargo, este tipo de información difícilmente coincidirá con los valores reales alcanzados al final del período simulado. Por ello, se considera que los valores relativos pueden reflejar mejor la tendencia demográfica. Con los datos obtenidos mediante simulación, se construirá un campo de probabilidades para estimar la probabilidad de alcanzar una determinada población en un momento específico.

La intención de este trabajo no es realizar un estudio demográfico de Navarra, sino desarrollar un método que permita establecer un conjunto de probabilidades sobre la cantidad relativa de habitantes en un horizonte temporal razonable, fijado en veinticinco años. La indeterminación inherente a cualquier modelo de proyección poblacional nos aleja de enfoques deterministas y nos orienta hacia aproximaciones probabilísticas basadas en criterios estocásticos. Dado que los acontecimientos demográficos futuros son desconocidos, se asume el riesgo de considerar que la tendencia poblacional seguirá una



evolución similar a la observada en los últimos años. Es evidente que cuanto mayor sea el horizonte de proyección, mayor será la indeterminación del modelo. Al fin y al cabo, predecir el futuro es un ejercicio especulativo que, aunque sustentado en bases científicas, no deja de ser una aproximación. En consecuencia, al hablar de futuro, optamos por hacerlo en términos de probabilidad y no desde una perspectiva determinista.

El modelo que presentamos toma la población como objeto de estudio, por lo que no es posible explicar el comportamiento

de otras variables; pero podemos repetir el modelo con cualquier variable (nacidos, defunciones, inmigrantes, emigrantes) y, así, observar el comportamiento individualizado de cualquier parámetro demográfico dado el carácter discreto de sus valores. Consideramos que un período de veinticinco años de población conocida no es apropiado para hacer un análisis *cross validation*, pero es suficientemente amplio para comparar las tendencias entre los datos conocidos con los datos simulados y, a su vez, extender la matriz de resultados durante los veintiséis años siguientes.

## 2. El desafío de modelar una realidad impredecible

UNA DE LAS CONDICIONES que afectan directamente a las variables demográficas es la diferencia entre la *población oficial* y la *población real*. Cuando hablamos de habitantes de un lugar o un área geográfica hay que distinguir entre población que vive donde está empadronada y la población que reside donde no está empadronada. Esta última población produce un doble efecto, por un lado, sobredimensiona la población donde no reside y, a su vez, ocurre lo contrario con la población donde reside. La población real de un lugar determinado la podemos representar de la siguiente manera:

$$\text{Pob. real} = \text{Pob. empadronada residente} + \text{Pob. no empadronada residente} - \text{Pob. empadronada no residente.}$$

La población real cambia continuamente, no la podemos conocer con los medios y datos oficiales que disponemos actualmente. Esto significa que las valoraciones que se pueden hacer con los datos estadísticos oficiales siempre es una aproximación a la situación real. Los datos oficiales son el punto de partida del análisis de la población, los vamos a considerar válidos porque para este estudio no hay otra opción. Los modelos son representaciones abstractas que permiten emplear los datos demográficos con una finalidad explicativa de lo ocurrido o de simular lo que puede ocurrir. No hay presente en el estudio demográfico. Tanto en el análisis del pasado poblacional como del futuro, los modelos debidamente desarrollados pueden llegar a mostrar tendencias sin resultados absolutos. Los modelos, tanto deterministas como estocásticos, no solo están condicionados por los valores estadísticos oficiales sino también por la selección y acotación de variables. No hay modelos ideales, en todo caso hay modelos que para cada situación pueden ser más adecuados que otros. La variabilidad en el comportamiento poblacional exige prudencia a la hora de configurar un modelo determinado. Los errores de proyección aumentan al incrementar el tiempo sobre el que operan las variables con datos estimados. Como es sabido, la previsión del comportamiento humano es más difícil de prever cuanto mayor es la distancia entre el punto de partida y el punto de llegada.

### 2.1. Modelos Demográficos Deterministas basados en Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO)

DEFINIMOS COMO MODELO DETERMINISTA aquel en el que se utilizan ecuaciones que describen una relación fija entre los datos de entrada y los de salida. Estos modelos muestran un comportamiento de alta precisión, sin que intervenga la variabilidad aleatoria. En un modelo determinista, las operaciones sobre los datos iniciales siempre producirán los mismos resultados de salida, lo que significa que el comportamiento es completamente predecible y no admite fluctuaciones aleatorias. Por lo tanto, si conocemos los valores de una población en un momento determinado, en el futuro solo existirá un único resultado posible.

La ventaja de utilizar modelos determinísticos es que necesitan pocos parámetros para realizar las previsiones. Uno de los modelos más habituales para el estudio del crecimiento de la población es el que emplea ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO). Este tipo de ecuaciones presentan una inconsistencia conceptual con la idea que estamos manteniendo en este trabajo, ya que las ecuaciones diferenciales ordinarias están indicadas para funciones continuas con variaciones temporales infinitesimales.

Hay autores que emplean modelos determinísticos mediante EDO para el estudio de la evolución de la población hasta nuestros días. Es el caso del historiador A. Korotayev y de la demógrafa D. Khaltourina quienes consideran que desde los orígenes de la humanidad hasta la década de 1970, hubo un crecimiento hiperbólico de la población relacionado con el crecimiento cuadrático-hiperbólico del PIB mundial (Korotayev & Khaltourina, 2006). No obstante, la ecuación que se ajusta con buena aproximación a las cifras de población del pasado, no permite explicar una posible población futura, ya que predice un crecimiento infinito. Para hacer proyecciones más precisas, se necesitan modelos más complejos (Hathout, 2013, p. 300).

## 2.2. Modelos Estocásticos

LOS MODELOS ESTOCÁSTICOS son aquellos que pueden hacer predicciones probabilísticas sobre la evolución futura de un sistema. Por tanto, no pueden determinar unívocamente el resultado futuro de una simulación.

Los modelos de ecuaciones diferenciales estocásticas (EDE) se han empleado en campos como la biología, la epidemiología, la mecánica, la economía o la demografía. Aunque hoy día tienen una gran relevancia, empezaron a ser muy significativos a partir del año 1905 (Fredericks & Mahomed, 2008). En estos modelos hay que tener un gran control con el tamaño de las variables y el tiempo de duración. En los estudios de dinámica de la población hay que considerar que vivimos en un mundo finito, por lo que hay que tener cuidado con la evolución de los datos que aportan las variables estocásticas para que el tamaño estimado de la población no sea arbitrariamente grande durante largos períodos de tiempo (Schreiber, 2012).

Uno de los modelos matemáticos que han servido de referencia para los estudios de evolución de variables estocásticas  $X(t, \omega)$  en el tiempo ( $t > 0$ ) y en trayectorias de probabilidad ( $\omega$ ), en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  es la ecuación diferencial estocástica que efectuó el matemático japonés Kiyoshi Itô (Itô, 1951):

$$dX(t, \omega) = f(X(t, \omega), \omega) dt + G(X(t, \omega), \omega) dW(t, \omega)$$

Donde:

$X(t, \omega)$  representa a la variable estocástica de un sistema en el tiempo  $t$ , con una trayectoria aleatoria  $\omega$ ;

$f(X(t, \omega), \omega) dt$  es la tasa de crecimiento esperada de  $X(t, \omega)$  en un incremento de tiempo  $t$ ;

$G(X(t, \omega), \omega)$  Es una función que regula las fluctuaciones aleatorias. Depende del valor de  $X(t)$  y del valor de  $\omega$  ajusta la intensidad del ruido blanco;

$dW(t, \omega)$  es el incremento diferencial del proceso de Wiener  $W(t, \omega)$  también denominado movimiento browniano, que también depende de  $\omega$ . Se puede interpretar como ruido blanco con media igual a cero (Week et al., 2021).

Para el propósito de este artículo, la ecuación diferencial estocástica de Itô es la formulación matemática, o base teórica, para construir un modelo que se pueda implementar con el modelo de simulación de Montecarlo. El punto de partida es la población ( $P$ ) y las tasas de crecimiento anual calculadas, en un intervalo de tiempo  $(t_i - t_f)$  correspondiente a los años 2000 al 2024. A partir de estos datos tenemos que simular los valores de las poblaciones  $P(t, \omega)$ , con 10000 trayectorias ( $\omega$ ). Una vez obtenidos los datos, calculamos la probabilidad de que en un año determinado exista una determinada cantidad de población.

## 3. Modelo de previsión de población en navarra entre los años 2025 y 2050 mediante la aplicación del método de simulación de Montecarlo

LOS DATOS DE POBLACIÓN llevan implícitos los resultados de las variables demográficas. En los 678.103 habitantes de la población registrada en el año 2024 están contemplados los datos de 2023, como son el 1,2 hijo por mujer, las 5.847 defunciones, (tasa bruta de mortalidad de 8,7‰), los 4.496 nacidos, (tasa bruta de natalidad de 6,66‰), las 15.499 inmigraciones del extranjero, las 6.313 emigraciones al extranjero o la población de 672.155 contabilizada el 1 de enero (Nastat, 2024). La población de cada año es una consecuencia de su pasado reciente. Pero en materia de población, los datos conocidos no son extrapolables, por tanto, para hacer una previsión de futuro debemos admitir un determinado grado de aleatoriedad, con unos límites fijados por el conocimiento de lo ocurrido en el pasado, y esto es lo que nos permite hacer el método de simulación de Montecarlo (o Monte Carlo).

Este método es una técnica matemática que otorga valores aleatorios a variables estocásticas. Con el empleo de los ordenadores, los programas destinados al cálculo matemático y a la estadística aplicada tienen algoritmos que generan números pseudoaleatorios que, para la mayoría de los casos en los que se aplica

el método de Montecarlo, son perfectamente válidos. Hoy día, el método de Montecarlo se aplica en distintos campos del conocimiento, desde la física o la ingeniería hasta la economía o la demografía.

### 3.1. Las condiciones del modelo

EL MODELO que vamos a desarrollar tiene la finalidad de mostrar las probabilidades de que la Comunidad Foral de Navarra alcance una determinada población anual desde el 2025 al 2050. El modelo se basa en:

1. Los valores conocidos de la población de Navarra desde el año 2000 hasta el 2024;
2. Las condiciones extraídas de la población que ha de seguir el modelo;
3. Una ecuación estocástica basada en el método de Itô;
4. Aplicación del método de Montecarlo para implementar la ecuación estocástica.



3.1.1. La población de Navarra desde el año 2000 al 2024

SEGÚN LOS DATOS RECOGIDOS del INE, la población de Navarra desde el año 2000 al 2024 aumentó un 24,7 %. La tasa de crecimiento anual fue variable, con etapas de crecimiento negativo. La ecuación empleada para calcular la tasa de crecimiento anual a partir de la población conocida es una adaptación de la fórmula que se emplea para calcular el interés compuesto:

$$P(t + 1) = P_t (1 + \tau)^n$$

Donde:

$P(t+1)$  es la población en el tiempo  $t+1$ ;

$n$  es el número de años;

$\tau$  es la tasa de crecimiento.

Como las poblaciones son anuales,  $n = 1$ , despejando la tasa de crecimiento ( $\tau$ ) en función del tiempo, tenemos:

$$\tau(t) = \left( \frac{P(t+1)}{P(t)} \right) - 1$$

Las poblaciones y las tasas de crecimiento anual en Navarra entre los años 2000 y 2024 son las siguientes:

La representación gráfica de los datos en la figura 1, nos muestra cómo ha evolucionado la población y su tasa de crecimiento en veinticinco años. Los valores de las poblaciones están tomados en la fecha 1 de enero de cada año, por tanto, las tasas de crecimiento hacen referencia al crecimiento de la población que hubo entre el 1 de enero del año A y el 1 de enero del año A+1, por este motivo no se registra la tasa de crecimiento en el año 1999. Si representamos en un mismo gráfico con dos ejes “y”, uno para las poblaciones y otro para las tasas de población, podemos observar las diferencias en la evolución de ambas.

En los veinticinco años observados, la población se ajusta mejor a una tendencia de crecimiento lineal que a una exponencial, con un coeficiente de correlación lineal de Pearson  $r = 0,9$ . Las variaciones de las tasas en el tiempo estudiado muestran una fuerte sensibilidad con las variaciones de las poblaciones. La tendencia que muestran las tasas de crecimiento respecto del tiempo es negativa, con un coeficiente de correlación de Pearson relativamente bajo ( $r = 0,55$ ), esto significa que, con el paso de los años y el aumento de la población, las tasas tienden a decrecer.

El modelo que vamos a seguir, lo diseñamos de forma que la tendencia de las tasas continúe siendo negativa. Pero, a diferencia de las ya conocidas, las tasas quedarán definidas por una función determinista con un decrecimiento constante. Las poblaciones se verán afectada tanto por dicha función como por pequeñas perturbaciones definidas en la ecuación con la que vamos a simular las poblaciones futuras.

Tabla 1. Población y tasa de crecimiento de Navarra

Años	Población	Tasa de crecimiento		Años	Población	Tasa de crecimiento
1999	538 009	–		2012	644 566	0,00392
2000	543 757	0,01068		2013	644 477	-0,00014
2001	556 263	0,02300		2014	640 790	-0,00572
2002	569 628	0,02403		2015	640 476	-0,00049
2003	578 210	0,01507		2016	640 647	0,00027
2004	584 734	0,01128		2017	643 234	0,00404
2005	593 472	0,01494		2018	647 554	0,00672
2006	601 874	0,01416		2019	654 214	0,01028
2007	605 876	0,00665		2020	661 197	0,01067
2008	620 377	0,02393		2021	661 537	0,00051
2009	630 578	0,01644		2022	664 117	0,00390
2010	636 924	0,01006		2023	672 155	0,01210
2011	642 051	0,00805		2024	678 103	0,00885

Fuente: Población: INE. Elaboración propia.

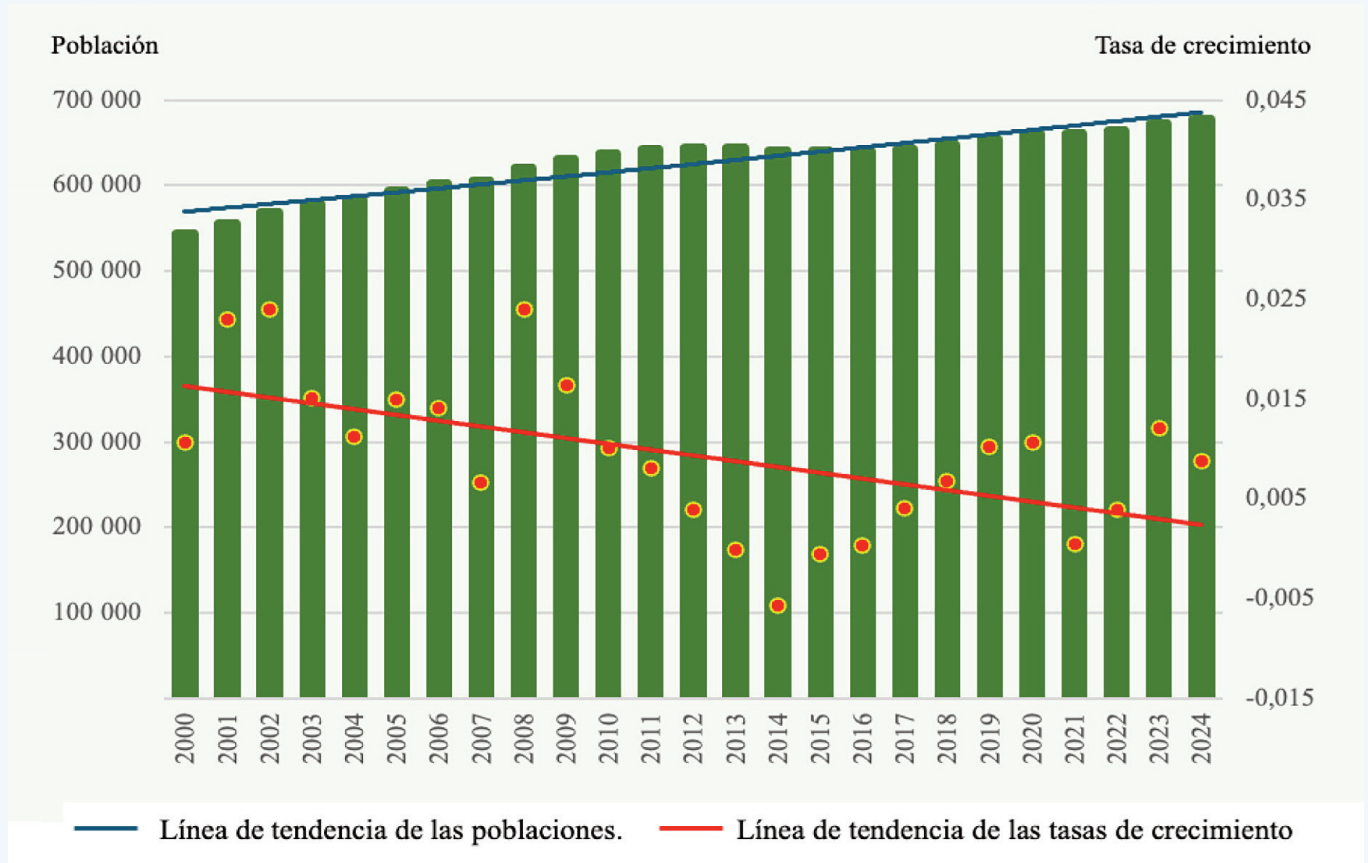


Figura 1. Población y tasas de crecimiento de Navarra desde el año 2000 al 2024.

Fuente INE (2024). Elaboración propia.

### 3.1.2. Método de Euler-Maruyama

COMO SE HA INDICADO anteriormente, la simulación de la población se hará mediante la aproximación numérica de la ecuación diferencial estocástica de Kiyoshi Itô. Dos de los métodos numéricos más conocidos son el de Milstein (Milstein, 2013) y el de Euler-Maruyama (Kayode et al., 2016). Hemos seleccionado este último por que cumple con la finalidad del presente trabajo y por su facilidad para ser implementado en un lenguaje de programación.

El método numérico de Euler-Maruyama se emplea para generar una serie de trayectorias como consecuencia de la partición del tiempo en intervalos discretos ( $\Delta t$ ). La forma diferencial de la ecuación de Euler-Maruyama es:

$$dP(t) = \tau P_n \Delta t + \rho P_n \Delta W_t$$

En su forma discreta queda:

$$Y_{t+\Delta t} = Y_t + (Y_p \ t) \Delta t + \rho (X_p \ t) \Delta W_t$$

Donde:

$\Delta W_t$  es el incremento del proceso de Wiener (aleatorio) en un pequeño intervalo de tiempo. A  $\Delta W_t$  también se le llama movi-

miento browniano. Hay que tener en cuenta que  $\Delta W_t \sim N(0, \Delta t)$ , es decir, el proceso de Wiener sigue una distribución normal (gaussiana) con media igual a cero y varianza igual a  $\Delta t$  (la varianza es proporcional al intervalo de tiempo). En las proyecciones de las poblaciones que vamos a realizar, el proceso de Wiener es el que establece la pauta estocástica, que repercutirá en cada uno de los trayectos de la población simulada.

Para obtener los resultados de la población simulada con las variables que vamos a emplear, adaptamos esta fórmula genérica a la ecuación que vamos a implementar en la simulación. La nueva ecuación se repetirá sucesivamente en intervalos fijos de tiempo.

La fórmula definitiva queda de la siguiente manera:

$$P_{n+1} = P_n + \tau P_n \Delta t + \rho P_n \Delta W_t$$

Donde:

$P_{n+1}$  es la población simulada en la iteración  $n+1$ ;

$P_n$  = población simulada con cada incremento del tiempo;

$\tau P_n \Delta t$  es la parte determinística de la ecuación:

$\tau$  = Tasa generada con cada incremento del tiempo;

$\Delta t$  = variación del tiempo;

$\rho P_{\eta} \Delta W_t$  es la parte estocástica de la ecuación:

$\rho$  = volatilidad;

$\Delta W_t$  = proceso de Wiener (valor aleatorio).

Las variables utilizadas son las siguientes:

$P_0$  = población inicial de la simulación;

$\tau_0$  (tau) = Tasa de crecimiento inicial de la simulación;

$\rho$  (ro) = Volatilidad de la tasa de crecimiento de la población real = 0,007605446. La volatilidad es el valor de la desviación estándar de las tasas; una desviación = 1 supone que no hay dispersión en los valores de las tasas, por tanto, no habría volatilidad;

$\delta$  (delta) = Pendiente decreciente de la tasa real = -0,00007. Suponemos que, en el futuro, la pendiente de la tasa de crecimiento seguirá siendo negativa. Como la pendiente de una recta se define:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Al sustituir los términos, tenemos:

$$\delta = \frac{\Delta \tau}{\Delta t} = \frac{\text{Tasa final conocida} - \text{Tasa inicial conocida}}{\text{Número de períodos incluidos} (2004 - 2000 + 1)} = \frac{0,00885 - 0,01068}{25} = -0,00007$$

La volatilidad y la pendiente son valores de ajuste que podemos modificar para afinar las trayectorias de la población estimada.

### 3.1.3. Algoritmo de simulación Montecarlo-Euler-Maruyama (M-E-M)

COMO YA SE HA DICHO anteriormente, se ha empleado el código del lenguaje de programación Python para obtener las estimaciones de las poblaciones de Navarra entre los años 2025-2050. Las librerías utilizadas son: numpy (np) y pandas (pd).

Variables empleadas:

Los años de la simulación: año de inicio: 2000, año de finalización: 2050;

número de trayectorias anuales ( $\omega$ ) = 10.000;

población inicial = 543.757;

tasa de crecimiento inicial ( $\tau_0$ ) = 0,01068;

delta = -0,000095, es un valor ajustado empíricamente a partir del valor calculado

(-0,00007), Es muy sensible y cualquier modificación, incluso en el último dígito decimal, altera muy significativamente los resultados;

ro = 0,007605446. También es un valor de ajuste y ocurre lo mismo que con el de delta.

Cuando se quiera mantener los mismos datos de la simulación y tener siempre las mismas trayectorias, hay que emplear la instrucción "np.random.seed(42)", (42 es número semilla que lo podemos variar según nos convenga). En nuestro caso, queremos que cada vez que se haga la simulación aparezcan trayectorias diferentes, por tanto, no aplicamos esta instrucción al programa.

Para iniciar el proceso de simulación, necesitamos crear una matriz de ceros de orden [10.000 X 51] donde, sucesivamente, se irán instalando los valores calculados:

poblaciones = np.zeros((simulaciones\_año, len(años))).

El proceso de cálculo se hace mediante un "bucle for". Las instrucciones son las siguientes:

for i in range(1, len(años)):

t = años[i]

tasa\_estimada = abs(tasa\_inicial + delta \* (t - año inicio simulación - 1)) # Tasa de crecimiento decreciente. Para la simulación desde el año 2000, el año inicio simulación - 1 será: 1999; para 2017, el año inicio simulación - 1 será: 2016. dW = np.random.normal(0, 2, simulaciones\_año) # Proceso de Wiener. Los resultados también son muy sensibles a los valores del intervalo random.normal. P\_prev = poblaciones[:, i - 1]  
poblaciones[:, i] = P\_prev + tasa\_estimada \* P\_prev + ro \* P\_prev \* dW # Ecuación estocástica

df\_resultados = pd.DataFrame(poblaciones, columns=años)  
# Resultados en la matriz de ceros.

## 4. Resultados

### 4.1. Simulación M-E-M desde el año 2000 hasta el año 2050 (51 períodos)

REALIZADOS LOS AJUSTES necesarios para que los resultados simulados se aproximen lo máximo posible a los valores conocidos, se realizaron varias pruebas y se seleccionó al azar una de las simulaciones. Los valores que se obtuvieron (matriz [10.000

X 51]) conformaron un campo de probabilidades. A continuación, se presenta una muestra de los valores simulados.

Una vez obtenidos los datos anuales, se enumeraron los valores que superaban un umbral determinado (por ejemplo, número de casos que superaban el valor 700.000). Conocido el número de casos, se calcularon las probabilidades de alcanzar el umbral fijado. Esta operación se repitió en todos los años de la simulación. La Tabla 3 es una muestra de los años, umbrales y probabilidades.

**Tabla 2. Muestra de los valores de la matriz [10.000 X 51]**

	2000	2001	2002	2003	2004	...	2046	2047	2048	2049	2050
1	543 757	542 601	549 473	547 445	551 097		931 261	939 117	951 273	960 967	985 038
2	543 757	547 892	560 367	569 362	559 118		713 905	693 155	687 780	716 518	726 472
3	543 757	566 964	557 667	554 763	546 047		803 157	827 208	837 882	844 134	827 652
4	543 757	541 063	557 816	558 886	577 517		861 321	847 720	858 856	861 546	862 903
5	543 757	541 623	545 388	551 041	538 713		789 182	799 826	797 534	815 385	802 959
...						...					
9996	543 757	546 883	531 893	533 641	546 315		894 734	900 957	895 321	895 228	913 812
9997	543 757	544 864	553 882	555 681	564 204		889 366	916 981	946 463	952 028	950 272
9998	543 757	544 419	552 770	574 475	575 317		763 538	778 519	797 247	804 510	803 059
9999	543 757	561 922	554 936	546 669	549 383		814 277	816 254	819 986	821 926	809 463
10000	543 757	558 986	567 336	560 474	565 177		880 249	894 041	923 639	913 994	923 355

Fuente: Elaboración propia.

**Tabla 3. Valores simulados de poblaciones medias y probabilidades de población en Navarra**

Años	P. Med	N>600000	N(U)	N>650000	N(U)	N>700000	N(U)	N>750000	N(U)	N>800000	N(U)	N>850000	N(U)	N>900000	N(U)
2000	543 757	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00
2005	572 024	767	0,07	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00
2010	600824	5004	0,50	485	0,05	8	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00
2015	629348	7838	0,78	2806	0,28	355	0,03	12	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00
2020	657 815	9079	0,90	5537	0,55	1678	0,17	254	0,02	13	0,00	0	0,00	0	0,00
2025	686 145	9582	0,96	7538	0,75	3777	0,38	1125	0,11	200	0,02	30	0,00	2	0,00
2030	713 758	9793	0,98	8622	0,86	5748	0,57	2606	0,26	775	0,08	172	0,02	27	0,00
2035	740 526	9886	0,99	9210	0,92	7215	0,72	4245	0,42	1793	0,18	543	0,05	149	0,01
2040	766 392	9930	0,99	9526	0,95	8146	0,81	5689	0,57	3084	0,31	1308	0,13	416	0,04
2045	791 842	9959	0,99	9706	0,97	8758	0,87	6825	0,68	4390	0,44	2274	0,23	962	0,10
2050	816 581	9975	1	9789	0,98	9154	0,91	7683	0,77	5530	0,55	3323	0,33	1679	0,17

Fuente: Elaboración propia.

Donde:

$N > U$  = número de valores (N) superiores al valor umbral (U);

$N(U)$  = Casos favorables (N) / Casos posibles (U).

A partir de la tabla, se observa que la probabilidad de que Navarra supere los 700.000 habitantes en 2030 es del 57 %, la probabilidad aumenta al 81 % en el 2040. Mientras que la probabilidad de alcanzar los 800.000 habitantes en 2050 es del 55 %. La probabilidad de que la Comunidad Foral llegue a los 900.000 habitantes en el período de tiempo estudiado es reducida, solo alcanza el 17 % en el año 2050.

## 4.2. Comparación de los datos de la población conocida con la simulación Montecarlo-Euler-Maruyama y la proyección realizada por el Instituto de Estadística de Navarra (Nastat)

EN LOS PRIMEROS 20 AÑOS del siglo XXI, Navarra tuvo un incremento de población del 21,5 %, cuatro veces superior al del País Vasco y el doble que el de Aragón (Oliveros et al., 2020). El incremento poblacional se manifiesta en la forma alabeada de la curva de población que se muestra en la figura 2. A partir de 2012, la población dejó de crecer al ritmo de la primera década del siglo XXI y mantuvo un aumento estable.

Al comparar los datos de la población conocida con los obtenidos en la simulación, observamos que en el año 2010 se da la diferencia porcentual ( $D\%$ ) máxima entre ambas series (5,67 %)<sup>1</sup>. Ocho años después, en 2018, se registra la diferencia porcentual mínima (0,17 %). El valor medio de las diferencias porcentuales de los veinticinco años es del 2,29 %. Estas diferencias muestran la proximidad entre los valores reales y simulados, especialmente hacia el final de la serie (año 2024) donde la convergencia de ambas series es máxima.

Tras analizar los datos de población y de la simulación, procedemos a compararlos con la proyección realizada por el Instituto de Estadística de Navarra (Nastat, 2021). La proyección realizada por el Nastat alcanza el período 2021-2035. Los años comunes entre las dos simulaciones y la población solo son cuatro, para analizar el conjunto de datos tomaremos: a) la población conocida desde el 2021 (inicio de la proyección del Nastat) hasta el final de la serie, año 2024 (final de la población

oficial), b) los datos correspondientes a los mismos años de la simulación M-E-M y c) los datos de la proyección del Nastat, también de esos cuatro años. En la Tabla 4 se presentan las diferencias porcentuales entre la población real, la simulación M-E-M y la proyección del Nastat para los años 2021-2024.

Como se observa en la tabla 4, en los cuatro años analizados, las diferencias porcentuales entre la población conocida y las poblaciones simuladas son mínimas. El valor medio de las diferencias porcentuales de la población respecto de la proyección M-E-M es de -0,44 %, ligeramente inferior a la del Nastat, que alcanza el -0,46 %. Cabe señalar que un período de cuatro años resulta insuficiente para evaluar la comparación de los dos modelos matemáticos. Veamos la evolución de la proyección y de las simulaciones gráficamente:

En el año 2021 la diferencia porcentual de la proyección Nastat respecto de la simulación M-E-M era de -0,09 %. La estimación del Nastat mostraba un valor ligeramente inferior al obtenido con el modelo M-E-M, a partir de entonces las diferencias porcentuales de la población propuesta por el Instituto de Estadística de Navarra se incrementan tanto con la población real como con la estimada por M-E-M. Para el año 2035 la proyección de la población del Nastat alcanza los 763.326 habitantes, en tanto que la proyección M-E-M muestra una población media de 740.526, la diferencia absoluta es de 22.800, el valor relativo de la diferencia entre ambas proyecciones es notable, asciende al 3 %.

Las simulaciones muestran tasas de crecimiento de población que, también, se van distanciando con el paso de los años. De acuerdo con la ecuación para obtener la tasa de crecimiento de población expuesta anteriormente, podemos calcular la tasa de crecimiento de la población entre años no consecutivos mediante la siguiente expresión:

$$\tau_{i,f} = \left[ \left( \left( \frac{P_f}{P_i} \right)^{\frac{1}{n}} \right) - 1 \right] \times 100$$

Donde:

$t_{i,f}$  es la tasa entre un año inicial ( $Año_i$ ) y un año final ( $Año_f$ );

$P_i$  es la población del año inicial;

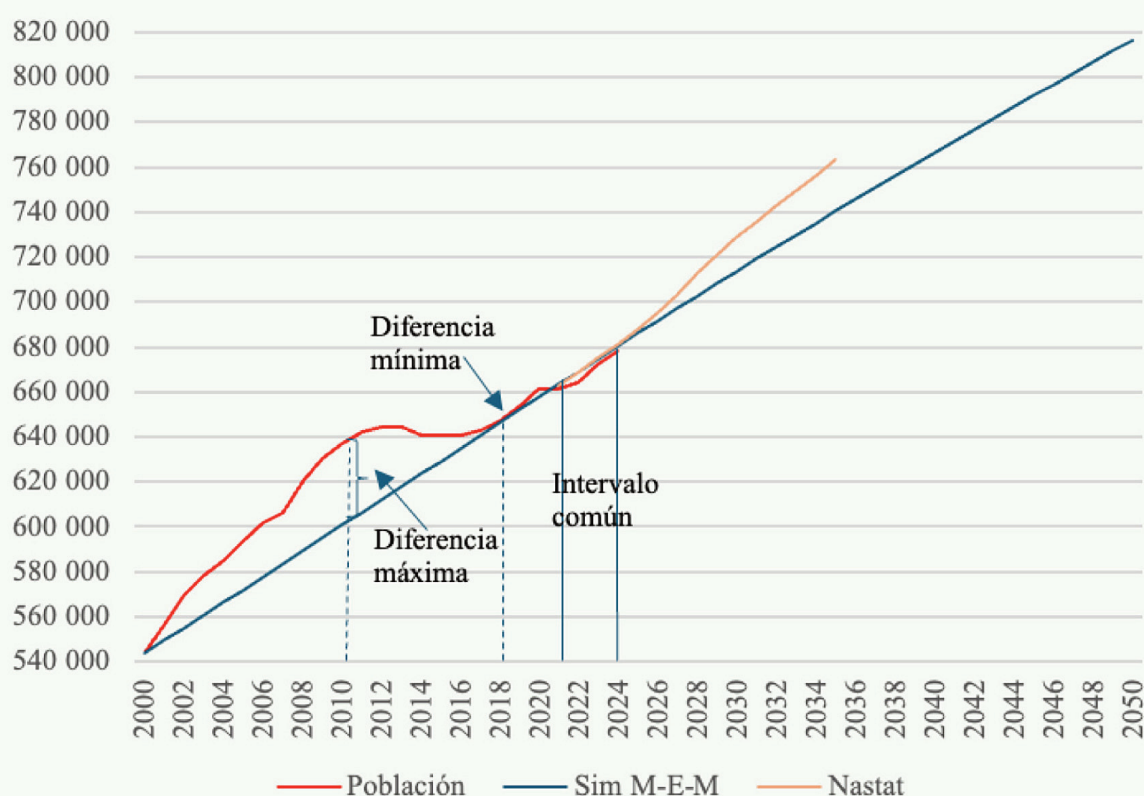
$P_f$  es la población del año final;

$n$  es el número de años sobre el que se va a calcular la tasa.

<sup>1</sup> Población real en el 2010 = 636.924; población proyectada en el 2010 = 600.824

$D\% = ((636.924 - 600.824) / 636.924) \times 100 = 5,67 \%$ .





**Figura 2. Evolución de las poblaciones real y simuladas.**

Fuente: INE (2024). Elaboración propia.

**Tabla 4. Diferencias entre las poblaciones real, Nastat y simulada M-E-M**

Años	Población	Simulación M-E-M	Proyección Nastat	Dif. % Pob – Simul M-E-M	Dif. % Pob – proyección Nastat
2021	661 537	663 451	662 887	-0,29 %	-0,20 %
2022	664 117	669 002	668 856	-0,73 %	-0,71 %
2023	672 155	674 724	675 041	-0,38 %	-0,43 %
2024	678 103	680 423	681 341	-0,34 %	-0,48 %
			Dif. % Media	-0,44 %	-0,46 %

Fuente: Nastat e INE (2024). Elaboración propia.

Las tasas de crecimiento en diferentes períodos las podemos observar en la tabla 5.

La tabla tiene tres partes. En la primera, comparamos la tasa de crecimiento de la población real con la tasa simulada M-E-M, en el período 2000-2024, y observamos que es prácticamente la misma, mientras que la tasa de población conocida es del 0,92 %, la tasa de población simulada es del 0,93 %, entre ambas hay una diferencia de una centésima.

En la segunda parte de la tabla comprobamos las diferencias que hay entre la tasa de crecimiento de población proyectada por el Nastat y la tasa obtenida mediante la simulación M-E-M. Aunque la diferencia no es muy grande, podemos notar que el valor de la propuesta por el Instituto de Estadística de Navarra (1,01 %) es superior a la simulada M-E-M (0,78 %). Las tasas de este segundo grupo no son comparables con las del primero, puesto que los períodos de tiempo son diferentes. En el caso de que se cumpliesen las estimaciones que hace la simula-



ción M-E-M, supondría una disminución de la población esperada por el Instituto de Estadística de Navarra para el año 2035 (Nastat, 2021).

La tercera parte de la tabla, indica la tasa de crecimiento entre el 2025 y el 2050, en total son los 25 años simulados que proponemos en este estudio, el valor obtenido es  $t_{i,f}= 0,7 \%$ , lo que supondría la confirmación de lo analizado en la segunda parte de la tabla, extendido hasta el final del período estudiado. En definitiva, la simulación M-E-M prevé la ralentización del crecimiento de la población en Navarra.

En una proyección cabe suponer que cuantos más años queremos simular mayor es el error acumulado. En el futuro viable para el ser humano nada puede excluirse. El modelo aquí desarrollado, como cualquier otro, es una simplificación de lo observable. La intención es ofrecer una información aproximada de lo que pueda llegar a suceder. De momento el futuro no es definible, es solo una probabilidad *a priori* no demostrable.

**Tabla 5. Tasas de crecimiento de población obtenidas**

	Año inicial	Año final	Nº de años	Pob. inicial	Pob. final	Tasa de crec pob. inicial-final
Pobl. conocida	2000	2024	24	543 757	678 103	0,92 %
Simul. M-E-M	2000	2024	24	543 757	680 423	0,93 %
Proyec. Nastat	2021	2035	14	662 887	763 326	1,01 %
Simul. M-E-M	2021	2035	14	663 451	740 526	0,78 %
Simul. M-E-M	2025	2050	25	686 145	816 581	0,7 %

Fuente: Nastat e INE (2024). Elaboración propia.

## 5. Conclusiones

LAS SIMULACIONES DE POBLACIONES son hipótesis sobre la evolución de poblaciones futuras basadas en datos conocidos. Estas proyecciones permiten visualizar posibles escenarios de crecimiento con distintos niveles de indeterminación (Preston et al., 2001). El empleo de ecuaciones diferenciales estocástica (EDE) mediante el método de simulación de Montecarlo ofrece un marco más realista en comparación con los modelos deterministas, que únicamente representan un escenario posible de crecimiento.

Dado que no existe un método infalible para predecir la evolución poblacional, hay que optar por herramientas que permitan aproximar lo calculado con lo que en el futuro será real. Según el modelo M-E-M expuesto en este trabajo, la población en el año 2035 será inferior a la proyectada por el Nastat. Mien-

tras que este último, como se ha indicado anteriormente, estima que la población alcanzará los 763.326 habitantes en enero de 2035, el modelo M-E-M indica que esta cifra se alcanzará con una probabilidad del 50 % a lo largo de 2039.

Las diferencias entre los datos de la proyección del Nastat y los obtenidos en este estudio aumentan con el tiempo, lo que sugiere que cualquier proyección a largo plazo conlleva una acumulación de error. En definitiva, el modelo aquí desarrollado no busca establecer una predicción exacta, sino proporcionar un marco probabilístico razonable sobre la evolución de la población. La validación definitiva de estas proyecciones dependerá de los datos poblacionales futuros, pero los resultados actuales sugieren que el modelo M-E-M ofrece una herramienta prometedora para la planificación demográfica en los estudios geográficos.

## 6. Bibliografía

- Fredericks, E., & Mahomed, F. M. (2008). A Formal Approach for Handling Lie Point Symmetries of Scalar First-Order Itô Stochastic Ordinary Differential Equations. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, 15 (sup 1), 44-59. <https://doi.org/10.2991/jnmp.2008.15.s1.4>
- I.N.E. (2024). *Proyecciones de la Población de España 2004-2074. Metodología*. 61. <https://acortar.link/xWXIGZ>
- Itô, K. (1951). On Stochastic Differential Equations. *American Mathematical Society*, 4, 57. <https://archive.org/details/onstochasticdiff029540mbp/page/n1/mode/2up>
- Kayode, S. J., Ganiyu, A. A., & Ajiboye, A. S. (2016). On One-Step Method of Euler-Maruyama Type for Solution of Stochastic Differential Equations Using Varying Stepsizes. *OALib*, 03(01), 1-15. <https://doi.org/10.4236/oalib.1102247>
- Korotayev, A. V., & Khaltourina, D. (2006). *Introduction to social macrodynamics: Secular cycles and millennial trends in Africa*. Editorial URSS.
- Milstein, G. N. (2013). *Numerical Integration of Stochastic Differential Equations*. Springer Science & Business Media.
- Nastat. (2021). *Proyecciones de población. Referencia de datos: 2021-2035*. Navarra.es. <https://acortar.link/8FOOd1>
- Nastat. (2024). *Sistema de indicadores de Navarra*. Navarra.es. <https://acortar.link/vXYSxR>
- Oliveros, R. (Coordinadora), Alonso, P., García, C., & Sosa, J. (2020). *La economía de la Comunidad Foral de Navarra: Diagnóstico estratégico* (CaixaBank, S.A.). CaixaBank Research.
- Osés-Arranz, A., & Quilis, E. M. (2017). Probabilistic Population Projections Using Monte Carlo Methods: Spain, 2016-2066. *SSRN Electronic Journal*. <https://doi.org/10.2139/ssrn.3042472>
- Preston, S. H., Heuveline, P., & Guillot, M. (2001). *Demography: Measuring and modeling population processes*. Blackwell Publishers.
- Roncero, U. M., & Rodríguez, A. D. (2019). Proyecciones demográficas: Análisis básico de la magnitud y estructura de una población y su proyección futura. En *Métodos y técnicas de investigación para estudios de urbanismo y territorio* (pp. 79-96).
- Schreiber, S. J. (2012). Persistence for stochastic difference equations: A mini-review. *Journal of Difference Equations and Applications*, 18(8), 1381-1403. <https://doi.org/10.1080/10236198.2011.628662>
- Week, B., Nuismer, S. L., Harmon, L. J., & Krone, S. M. (2021). A White Noise Approach to Evolutionary Ecology. *Journal of Theoretical Biology*, 521. <https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2021.110660>