Condiciones de contorno reflexivas y transmitivas para métodos de Riemann: Aplicación en canales unidimensionales.

Juan Mairal, Javier Murillo, Pilar García-Navarro

[1] Grupo de Tecnologías Fluidodinámicas.
Instituto de Investigación en Ingeniería de Aragón (I3A)
Universidad de Zaragoza, Mariano Esquillor s/n, 50018, Zaragoza, Spain.
Tel. +34-976762707, e-mail: mairalascaso@unizar.es

Resumen

En este trabajo se plantea una formulación alternativa para las condiciones de contorno reflexivas y transmitivas para métodos de volumenes finitos basados en el problema de Riemann. Se actúa sobre las amplitudes de las ondas que se transmiten en el espacio de variables primitivas, asgurando que no haya transmisión en la dirección en la que no se desea.

Introducción

Tradicionalmente [1], en métodos de Riemann, las paredes de las celdas fronterizas se han resuelto suponiendo que existe un estado ficticio en el lado externo, habitualmente denominado "fantasma". Para lograr el efecto de reflexivo de una pared impermeable, o el efecto transmisivo de una frontera libre abierta, se han impuesto valores sencillos para las variables del sistema en en las celdas fantasma. Así, al resolver esas paredes por el método habitual como si fuesen paredes internas, se obtienen los resultados deseados.

No obstante, desde hace décadas es común en la literatura la conclusión de que estas condiciones de contorno no llegan a ser del todo buenas [2], principalmente porque la condición transmisiva no se comporta como una salida compretamente libre, propagando perturbaciones hacia interior del sistema. Desgraciadamente, en estudios más recientes se suele circunnavegar este problema, dando por buena la manera más básica de plantear las condiciones de contorno a pesar de los problemas que se sabe que conlleva.

En este trabajo, en lugar de imponer un estado fantasma para resolver el problema de Riemann de forma habitual, se propone partir de la suposición de que es la amplitud las ondas que propagan la información a izquierda y derecha del problema de Riemann [3] la que se debe imponer para asegurar que no haya perturbaciones indeseadas.

Modelo matemático

Supongamos un problema de valores iniciales con las Ecuaciones de Aguas Poco Profundas (SWE) un sistema de ecuaciones en derivadas parciales que se supone hiperbólico, de forma que los autovalores del Jacobiano son todos reales.

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \boldsymbol{J}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x} = 0, \qquad \boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u^2 - c^2 & 2u \end{pmatrix}$$

Para resolverlo, se recurre a un método de volúmenes finitos [3] tal que en el dominio discreto se busca encontrar los flujos en las paredes de las celdas. Así, se define el problema de Riemann local en cada una de ellas dado que inicialmente presentan una discontinuidad. Como las ecuaciones están acopladas, el sistema se transforma diagonalizando el Jacobiano. Las variables del sistema pasan a ser las primitivas V_k. Cada una de las ecuaciones desacopladas del sistema

$$\frac{\partial V_k}{\partial t} + \lambda_k \frac{\partial V_k}{\partial x} = 0$$

codifica la propagación de una onda con celeridad λ_k y amplitud $\alpha_k = \delta V_k$. Si se desea que la pared entre las celdas $N+1$ y N sea una frontera reflexiva sea reflexiva, se impone que todas las amplitudes asociadas a ondas de celeridad positiva sean nulas, mientras que las amplitudes asociadas a ondas de celeridad negativa deben sumar la diferencia de la primera variable en la pared $\delta h = h_{N+1} - h_N$:

$$\alpha_2 = 0 \; si \; \lambda_2 > 0, \qquad \alpha_1 = \delta h \quad si \;\; \lambda_1 < 0$$

En el caso de una pared transmisiva, son las ondas que viajan con celeridad positiva las que deben ser no nulas:

$$\alpha_1 = 0 \; si \; \lambda_1 < 0, \qquad \alpha_2 = \delta h \quad si \;\; \lambda_2 > 0$$

Estas condiciones tienen como consecuencia única la ecuación:

$\delta q = \lambda_1 \delta h$ para la condición reflexiva,

$\delta q = \lambda_2 \delta h$ para la condición transmisiva,

que no es información suficiente para poder resolver el estado en la celda fantasma. Es necesaria una condición extra:

- Para una condición reflexiva, se asume $q_{N+1} = 0$, al considerarse la pared impermeable, de forma que $\delta q = q_N$ es conocido, lo que permite resolver δh.
- Para una condición transmisiva, se asume que la onda de amplitud α_2 entre las celdas $N-1$ y N se propaga sin perturbarse a la pared entre las celdas N y $N+1$, y por tanto será la misma $(\delta h)_{N+1,N} = (\delta h)_{N,N-1}$, lo que permite resolver δq.

El estado $(h,q)_{N+1}$ se utiliza en el problema de Riemann entre las celdas N y $N+1$ de manera normal, asegurando que su solución sea coherente con la hipótesis de nula propagación aguas arriba para la condición transmisiva, o aguas abajo para la condición reflexiva.

Experimentos numéricos

Se plantea como experimento numérico un canal unidimensional. En él se propagan hacia la izquierda una onda de rarefacción y hacia la derecha una onda de choque. Los resultados demuestran que las condiciones de contorno tal y como se plantean en este trabajo son, al menos, tan efectivas como las tradicionalmente utilizadas. Además de los resultados mostrados aquí, también se plantea un análisis de frecuencias sobre ondas estacionarias en el canal, lo que permite medir de manera cuantitativa la diferencia entre las condiciones de contorno planteadas de una forma o de otra.

Conclusiones

Los resultados de los experimentos numéricos demuestran que plantear condiciones de contorno basadas en la amplitud de las ondas de propagación funciona por lo menos tan bien como los métodos tradicionales. Adicionalmente, allanan el terreno para formular condiciones de contorno mixtas en las que las ondas incidentes en la pared son parcialmente reflejadas, parcialmente transmitidas e incluso parcialmente absorbidas.

REFERENCIAS

[1]. TORO, E.F. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. *Springer Science & Business Media,* 2013.

[2]. ROE, P.L. Remote Boundary Conditions for Unstead Multidimensional Aerodynamic Computations. *Computers and Fluids* (17), 1989.

[3]. MURILLO, J. and NAVAS-MONTILLA, A. A comprehensive explanation and exercise of the source terms in hyperbolic systems using Roe type solutions. Application to the 1D-2D shallow water equations. *Advances in Water Resources* (98), 2018.

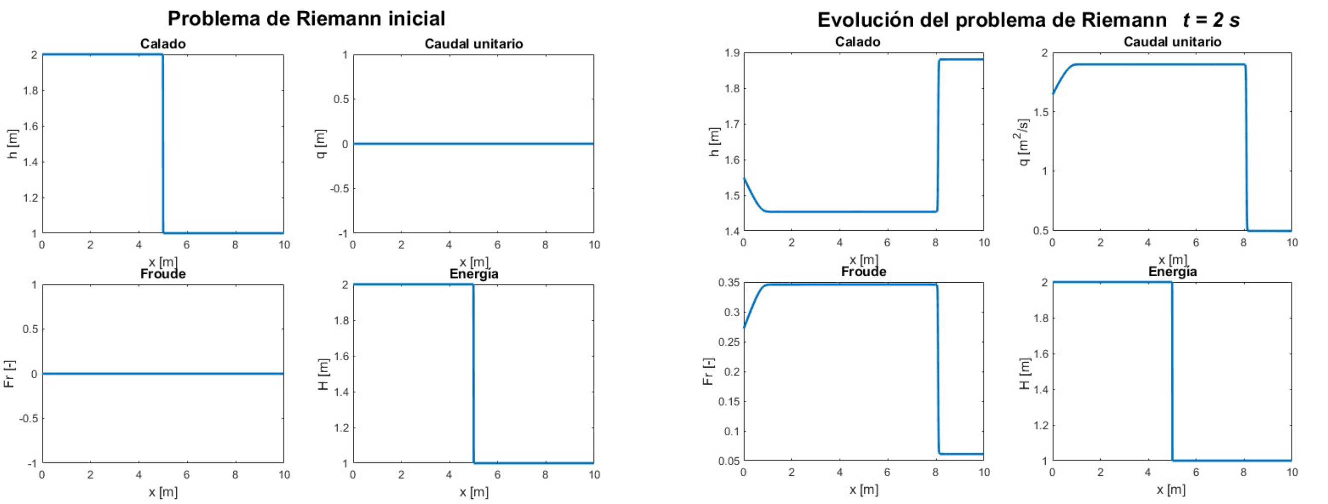

Figura 1: Estado inicial y evolución de un problema de Riemann con condiciones de contorno transmisivas (x=0 m) y reflexivas (x=10 m).